Zur Universalität und Hypertranszendenz der Dedekindschen Zetafunktion

Reich, Axel

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 33, 1982,
S.197-203

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Zur Universalität und Hypertranszendenz der Dedekindschen Zetafunktion

Von **Axel Reich,** Göttingen

1. Einleitung

Es werden zwei Problemkreise behandelt, die das Verhalten der Dedekindschen Zetafunktion ζ_K eines algebraischen Zahlkörpers K über $\mathbb{Q}$ betreffen, und die beide selbst im Falle $K=\mathbb{Q}$ (Riemannsche Zetafunktion) klassische Resultat recht weitgehend erweitern. Beide Probleme sind in [9], [10] in jüngster Zeit bearbeitet worden, und es soll hier nun auseinandergesetzt werden, daß mit den in [9], [10] verwendeten Methoden abschließende Ergebnisse für die Dedekindsche Zetafunktion erzielt werden können.

Das erste Problem behandelt die sogenannte Universalität von Zetafunktionen im Teil $1/2<\operatorname{Re} s<1$ des kritischen Streifens: Das klassische Resultat von BOHR und COURANT [2] über die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$, daß für jedes feste $\sigma\in(1/2,1)$ die Menge $\{\zeta(\sigma+it):t\in\mathbb{R}\}$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt, wurde im Anschluß an das Ergebnis von VORONIN [12] über $\zeta(s)$ nicht nur auf die Dedekindsche Zetafunktion verallgemeinert. In [9] wurde gezeigt, daß für geeignetes $\sigma_K<1$ (mit $\sigma_K=1/2$ für $K=\mathbb{Q}$) ζ_K die folgende Approximationseigenschaft besitzt: Zu jedem im Streifen $\sigma_K<\operatorname{Re} s<1$ gelegenen (abgeschlossenen) Kreis D, jeder auf D holomorphen Funktion f ohne Nullstellen und jedem $\varepsilon>0$ besitzt die Ungleichung

$$(1)\qquad \sup_{s\in D}|f(s)-\zeta_K(s+in)|<\varepsilon$$

eine Lösung $n\in\mathbb{N}$. Es gilt sogar, daß die untere asymptotische Dichte aller $n\in\mathbb{N}$, für die (1) gilt, positiv ist. Diese Eigenschaft von ζ_K ist bereits von rein funktionentheoretischem Interesse (vgl. z.B. [6]), denn von LUH [5] stammt z.B. der folgende Existenzsatz für „universelle Funktionen in $\mathbb{C}$“: Zu der Folge $\lambda_n=in$ gibt es eine ganze Funktion G mit der universellen Eigenschaft, daß zu jedem Kompaktum $B\subset\mathbb{C}$ mit zusammenhängendem Komplement, jeder auf B stetigen und im Innern von B holomorphen Funktion f, jedem $\varepsilon>0$ die Ungleichung

$$\sup_{s\in B}|f(s)-G(s+in)|<\varepsilon$$

eine Lösung $n\in\mathbb{N}$ besitzt (statt $\lambda_n=in$ kann man eine beliebige Folge $(\lambda_n)\subset\mathbb{C}$ mit ∞ als Häufungspunkt vorgeben). Daher ist die Frage von Interesse, ob sich das Resultat in [9] von Kreisen auf die in [5] betrachteten kompakten Mengen übertragen läßt. Im Falle der Riemannschen Zetafunktion (und für L-Reihen) ist dies für gewisse B bereits von BAGCHI [1] durchgeführt worden. Hier wird diese Frage für die Dedekindsche Zetafunktion abschließend behandelt, indem gezeigt wird, daß sich die Resultate von [9] auf genau die kompakten Mengen B in $\sigma_K < \mathrm{Re}\, s < 1$ übertragen lassen, die ein zusammenhängendes Komplement besitzen. Somit liefert die Dedekindsche Zetafunktion ein konkretes Beispiel einer universellen Funktion im Gebiet $\sigma_K < \mathrm{Re}\, s < 1$.

Das zweite Problem behandelt Erweiterungen der klassischen Resultate von HILBERT und OSTROWSKI zur Hypertranszendenz von ζ_K. Eine Funktion f heißt *hypertranszendent*, wenn aus dem Bestehen der algebraischen Differentialgleichung

(2) $\qquad \Phi(f(s), f'(s), \ldots, f^{(n-1)}(s)) = 0$

für alle s mit einem Polynom $\Phi \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ folgt, daß Φ das Nullpolynom ist. HILBERT [4] erkannte die Riemannsche Zetafunktion als hypertranszendent, und OSTROWSKI [7] bewies allgemeiner das entsprechende Ergebnis u.a. für die Dedekindsche Zetafunktion sogar für algebraische Differenzen-Differentialgleichungen (vgl. § 2).

In [10] wurde nun mit analytischen Methoden das Ergebnis von OSTROWSKI, das mit i.w. algebraischen Methoden erzielt wurde, für ζ_K dahingehend verallgemeinert, daß für ζ_K sogar nicht-triviale *holomorphe* Differenzen-Differentialgleichungen unmöglich sind. Der Beweis in [10] liefert sogar die schärfere Aussage: Ist Φ: $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und gilt für $f = \zeta_K$ z.B. die Gleichung (2) lediglich für alle s einer festen Geraden $\mathrm{Re}\, s = \sigma_0$ ($\sigma_0 > 1$ beliebig), so ist Φ die Nullfunktion. Die Frage, ob man weiter die Gerade $\mathrm{Re}\, s = \sigma_0$ durch eine diskrete, möglichst dünne Teilmenge ersetzen kann, wird hier (auch für Differenzen-Differentialgleichungen) abschließend beantwortet: Ist Φ: $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $\sigma_0 > 1$ beliebig, x_k eine beliebig schnell gegen ∞ wachsende Folge reeller Zahlen, so gibt es eine (übrigens von K unabhängige) Folge $n_k \in \mathbb{N}$ mit $n_k > x_k$, so daß aus dem Bestehen der Gleichung (2) für $f = \zeta_K$ und alle $s = \sigma_0 + in_k$ folgt: Φ ist die Nullfunktion.

Die Resultate schließen noch offene Fragen aus [9], [10] über die Dedekindsche Zetafunktion ab, benötigen aber zum Beweis bereits wesentlich die Ergebnisse und Methoden aus [9], [10]. Beim Beweis von Satz 1 wird zusätzlich der funktionentheoretische Satz von MERGELYAN benutzt.

2. Definitionen und Resultate

Für einen algebraischen Zahlkörper K über $\mathbb{Q}$ mit endlichem Körpergrad $n = [K:\mathbb{Q}]$ ist die Dedekindsche Zetafunktion ζ_K für $\mathrm{Re}\, s > 1$ durch

$$\zeta_K(s) = \sum (N\mathfrak{a})^{-s}$$

(Summation über alle ganzen Ideale $\mathfrak{a} \neq 0$ in K) definiert. ζ_K ist bekanntlich bis auf einen Pol bei $s = 1$ holomorph nach $\mathbb{C}$ fortsetzbar und besitzt für $\mathrm{Re}\, s > 1$ ein Eulerprodukt

(3) $\qquad \zeta_K(s) = \prod (1 - (N\mathfrak{p})^{-s})^{-1},$

wo das Produkt über alle Primideale $\mathfrak{p}$ in K zu erstrecken ist. Für

$$\sigma_K = \max(1/2, 1-1/n)$$

sei S_K die Menge aller kompakten Mengen B im offenen Vertikalstreifen $\sigma_K < \mathrm{Re}\, s < 1$ mit zusammenhängendem Komplement. Für $B \in S_K$ sei A(B) der Banachraum aller auf B stetigen Funktionen, die im Innern von B holomorph sind, $A_0(B)$ sei die Menge aller $f \in A(B)$, die in B keine Nullstelle besitzen. Bezeichnet man für $L \subset \mathbb{N}$ die (untere asymptotische) Dichte von L in $\mathbb{N}$ durch

$$\underline{\varrho}(L) = \underline{\lim}_{N\to\infty} N^{-1} \operatorname{card}\{m \leqq N : m \in L\},$$

so besitzt die Dedekindsche Zetafunktion folgende universelle Eigenschaft:

Satz 1. *Sei* $B \in S_K$, $f \in A_0(B)$. *Für jedes relle* $\Delta \neq 0$ *besitzt die Menge*

$$\mathcal{L} = \{m \in \mathbb{N} : \sup_{s \in B} |f(s) - \zeta_K(s + i\Delta m)| < \varepsilon\}$$

eine positive Dichte $\underline{\varrho}(\mathcal{L})$.

Bemerkungen.

(i) Die Bedingung $B \in S_K$ ist sicher notwendig (man übertrage [11], 13.8 auf diese Situation).

(ii) Ist $B \in S_K$ und $\zeta_K(s + i\Delta n_k)$ auf B gleichmäßig konvergent, so gilt für die Grenzfunktion f notwendig $f \in A(B)$. Z.B. im Falle $K = \mathbb{Q}$ läßt sich für jedes $B \in S_K$ mit nichtleerem Inneren in Satz 1 $A_0(B)$ sicher nicht durch A(B) ersetzen, falls die Riemannsche Vermutung richtig ist (vgl. die Bemerkung nach [9], Cor. 4.1).

(iii) Wegen $\underline{\varrho}(\mathfrak{L}) > 0$ läßt sich jedes $f \in A_0(B)$ sogar überraschend häufig durch Translate von ζ_K approximieren.

Um die Resultate von HILBERT und OSTROWSKI über die Hypertranszendenz von Zetafunktionen im Anschluß an [10] weitestgehend zu verschärfen, seien endlich viele reelle Zahlen $h_0 < h_1 < \ldots < h_\mu$ und $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vorgegeben. Zu $M = \nu_0 + \nu_1 + \ldots + \nu_\mu + \mu + 1$ und einer zunächst beliebigen Funktion $\Phi : \mathbb{C}^M \longrightarrow \mathbb{C}$ betrachten wir für $f = \zeta_K$ die Differenzen-Differentialgleichung

$$(*) \qquad \Phi(f(s+h_0), f'(s+h_0), \ldots, f^{(\nu_0)}(s+h_0), f(s+h_1), \ldots, f^{(\nu_1)}(s+h_1), \ldots \\ \ldots, f(s+h_\mu), f'(s+h_\mu), \ldots, f^{(\nu_\mu)}(s+h_\mu)) = 0.$$

OSTROWSKI [7] bewies (vgl. auch [8]) u.a.: Gilt für $f = \zeta_K$ und ein Polynom Φ die Gleichung (*) in der Halbebene $\mathrm{Re}\, s > 1 - h_0$, so ist Φ die Nullfunktion. Mit [10], Satz 2.1 wurde dieses Ergebnis für holomorphes Φ bewiesen, das hier verbessert werden soll zu

Satz 2. *Sei* $\Phi : \mathbb{C}^M \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorph und* $\sigma_0 > 1 - h_0$ *eine fest gewählte reelle Zahl. Zu jeder Folge* $(x_k) \subset \mathbb{R}$ *gibt es eine Folge* $n_k \in \mathbb{N}$ *mit* $n_k > x_k, k \in \mathbb{N}$, *und der folgenden Eigenschaft: Gilt* (*) *für* $f = \zeta_K$ *und alle* $s = \sigma_0 + i n_k, k \in \mathbb{N}$, *so ist* Φ *die Nullfunktion.*

Bemerkung. Da (x_k) beliebig schnell wachsen darf, ist (n_k) eine beliebig dünne Teilmenge von $\mathbb{N}$. Somit läßt sich Satz 2 in dieser Richtung sicher nicht weiter verbessern, denn trivialerweise gibt es zu endlich vielen $x_1,\ldots,x_l\subset\mathbb{R}$, $\sigma_0>1-h_0$ eine nicht-triviale holomorphe Funktion $\Phi:\mathbb{C}^M\longrightarrow\mathbb{C}$ (sogar ein Polynom), so daß (*) für alle $s=\sigma_0+ix_j$, $j=1,\ldots,l$, gilt.

3. Beweise

Beweis von Satz 1: Sei $\mathfrak{P}_1$ die Menge aller Primideale ersten Grades in K, $p_1<p_2<\ldots$ die ihrer Größe nach geordnete Folge der Zahlen, die als Normen der Primideale $\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}_1$ auftreten, und α_k die Anzahl aller $\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}_1$ mit $N\mathfrak{p}=p_k$. Demnach spaltet sich für

$$\zeta_{\mathfrak{p}_1}(s)=\prod_{k=1}^{\infty}(1-p_k^{-s})^{-\alpha_k}$$

das Eulerprodukt (3) von ζ_K auf in

$$\zeta_K(s)=\zeta_{\mathfrak{p}_1}(s)\cdot R(s),$$

wo R(s) in $\operatorname{Re} s>1/2$ holomorph und nullstellenfrei ist. Daher genügt es, Satz 1 in entsprechender Form für $\zeta_{\mathfrak{p}_1}$ anstelle von ζ_K zu beweisen.

Sei zunächst ein einfach zusammenhängendes $B_1\in S_K$ gegeben, dessen Rand analytisch ist und mit dem Rand von $\mathring{B}_1$, dem Inneren von B_1, übereinstimmt. Auf solche B_1 können wir den in [9] für Kreise angegebenen (recht langen) Beweis übertragen, wie die folgende Beweisskizze zeigt: Wegen $\sum_j|\alpha_j p_j^{-\sigma}|^2<\infty$ für $\sigma>1/2$ gibt es Zahlen $v_j\in\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$, so daß

$$(4)\qquad \sum_{j=1}^{\infty}\exp(2\pi i v_j)\alpha_j p_j^{-s}$$

für $\operatorname{Re} s>1/2$ kompakt gleichmäßig konvergiert. Insbesondere ist die Reihe (4) im Hardy-Raum $H^2(\mathring{B}_1)$ (vgl. [3], 10.1) enthalten. $H^2(\mathring{B}_1)$ ist nach [3], 10.1 ein Hilbertraum, der isometrisch isomorph zum klassischen Hardy-Raum H^2 des Einheitskreises ist. Für

$$f_j(s)=\log(1-p_j^{-s}\exp(2\pi i v_j))^{-\alpha_j}$$

beweist man analog zu [9], Lemma 2.1 mit der in [1] z. B. für $\zeta(s)$ angegebenen Übertragung auf einfach zusammenhängende B_1, daß die Menge aller in $H^2(\mathring{B}_1)$ konvergenten Umordnungen der Reihe $\sum f_j$ den ganzen Raum $H^2(\mathring{B}_1)$ liefert. Ist nun f auf B_1 holomorph und ohne Nullstellen (nicht nur $f\in A_0(B_1)$), so ist f analog zu [9], Cor. 2.2 gleichmäßig auf B_1 durch gewisse endliche Eulerprodukte approximierbar. Die Beweismethode von [9], Satz 3.1 wiederum liefert dann die Aussage von Satz 1 für obige B_1 und alle auf B_1 nullstellenfreien, holomorphen Funktionen f. Nach dieser Erläuterung ergibt sich mühelos der allgemeine Fall in Satz 1: Es sei $B\in S_K, f\in A_0(B)$.

Nach dem Satz von MERGELYAN (vgl. [11], Th. 20.5) gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein Polynom P mit

(5) $\quad |f(s) - P(s)| < \varepsilon/2, \; s \in B.$

Wegen $f \in A_0(B)$ läßt sich P so wählen, daß die Nullstellen $z_1, \ldots, z_l$ nicht in B enthalten sind. Da außerdem das Komplement von B zusammenhängend ist, gibt es eine einfach zusammenhängende Menge $B_1 \in S_K$ der oben betrachteten Art, die zwar B aber kein $z_j, j = 1, \ldots l$, enthält. Somit ist P auf B_1 holomorph und ohne Nullstelle in B_1, so daß nach obigem Ergebnis für jedes $\Delta \neq 0$ die Menge

$$\mathfrak{L}' = \{m \in \mathbb{N} : \sup_{s \in B_1} |P(s) - \zeta_K(s + i\Delta m)| < \varepsilon/2\}$$

eine positive Dichte besitzt. Wegen $B_1 \supset B$ und (5) ergibt sich Satz 1.

Beweis von Satz 2: Ist $\mathfrak{P}$ die Menge der Primideale in K, so wähle man $q_1 < q_2 < \ldots$ als eine Folge rationaler Primzahlen, so daß jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ sich in der Form $N\mathfrak{p} = q_k^f$ mit geeigneten $k \in \mathbb{N}$ und $f \leq n = [K : \mathbb{Q}]$ (f der Grad des Primideals) schreiben läßt. Es sei

$$a_k(f) = \text{card}\{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P} : N\mathfrak{p} = q_k^f\}.$$

Man benötigt aus [10] die folgenden Hilfsfunktionen: Für eine Menge $A = \{k(1), \ldots, k(2M)\}$ von 2M paarweise verschiedenen natürlichen Zahlen, $\Theta = (\vartheta_{k(1)}, \ldots, \vartheta_{k(2M)}) \in \in [0,1]^{2M}$, $\operatorname{Re} s > 1$ sei

$$\zeta_K(A, \Theta, s) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \notin A}}^{\infty} \prod_{f=1}^{n} (1 - q_k^{-fs})^{-a_k(f)} \prod_{k \in A} \prod_{f=1}^{n} (1 - q_k^{-fs} \exp(2\pi i f \vartheta_k))^{-a_k(f)}$$

Dann gilt nach (3) für jedes $A \subset \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{C}$

$$\zeta_K(A, 0, s) = \zeta_K(s).$$

Für $\sigma_0 > 1 - h_0$, $\Theta \in [0,1]^{2M}$, $j \leqq \mu, \nu \leqq \nu_j$ bezeichne $(\log \zeta_K(A, \Theta, \sigma_0 + h_j))^{(\nu)}$ die ν-te Ableitung nach s von $\log \zeta_K(A, \Theta, s)$ an der Stelle $\sigma_0 + h_j$ und $\varphi_{A,\sigma_0} : [0,1]^{2M} \longrightarrow \mathbb{C}^M$ die (im Hinblick auf die Relation (*) von Satz 2) durch

$$\begin{aligned}\varphi_{A,\sigma_0}(\Theta) = (&\log \zeta_K(A, \Theta, \sigma_0 + h_0), (\log \zeta_K(A, \Theta, \sigma_0 + h_0))', \ldots, (\log \zeta_K(A, \Theta, \sigma_0 + h_0))^{(\nu_0)}, \\ &\log \zeta_K(A, \Theta, \sigma_0 + h_1), \ldots, (\log \zeta_K(A, \Theta, \sigma_0 + h_\mu))^{(\nu_\mu)})\end{aligned}$$

definierte Abbildung. Zu fest vorgegebenem $\sigma_0 > 1 - h_0$ gibt es nach [10], Lemma 2.2 eine nun fest gewählte endliche Menge $A = \{k(1), \ldots, k(2M)\}$ und nicht-leere offene Mengen $U_2 \subset [0,1]^{2M}$, $U_1 \subset \mathbb{C}^M$ mit $\varphi_{A,\sigma_0}(U_2) = U_1$.

Für $m \in \mathbb{Z}$ ist bekanntlich $\exp(2\pi m) \in \mathbb{Q}$ nur für $m = 0$ möglich, so daß eine Relation

$$m = \sum_{l=1}^{L} m_l (2\pi)^{-1} \log q_l$$

mit $m, m_l \in \mathbb{Z}, l=1,\ldots,L$, nur für $m = m_1 = \ldots = m_L = 0$ stattfinden kann. Ist $\mathbb{T}^\infty$ das vollständig direkte Produkt abzählbar vieler Kreisgruppen $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$, so besitzt daher für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ nach der diskreten Form des Kroneckerschen Approximationssatzes die durch

$$\iota(n) = (-n(2\pi)^{-1} \log q_1, -n(2\pi)^{-1} \log q_2, \ldots) \bmod 1$$

definierte Abbildung $\iota: \mathbb{N} \cap [n_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{T}^\infty$ ein dichtes Bild in $\mathbb{T}^\infty$. Zu der in Satz 2 vorgegebenen Folge (x_k) läßt sich daher eine Folge $(n_k) \subset \mathbb{N}$ mit $n_k > x_k$, $k \in \mathbb{N}$, finden, so daß $\{\iota(n_k): k \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\mathbb{T}^\infty$ ist. Nur der Vollständigkeit halber wird nun das in [10] angegebene Verfahren auf den diskreten Fall übertragen:

Sei $\varepsilon > 0$ und $\varphi_{A,\sigma_0}(\Theta^{(0)})$ (mit $\Theta^{(0)} = (\vartheta^{(0)}_{k(1)}, \ldots, \vartheta^{(0)}_{k(2M)}) \in U_2$) ein beliebiges Element von U_1. Für hinreichend groß gewähltes $N = N(\varepsilon)$ gilt

$$(6) \qquad \Big|(\log \zeta_K)^{(\nu)}(s+h_\varkappa) - \sum_{l=1}^{m} \sum_{f=1}^{n} -a_l(f)\,(\log(1-q_l^{-f(s+h_\varkappa)}))^{(\nu)}\Big| < \varepsilon/3$$

für $\nu \leqq \max\limits_{\varkappa=1}^{\mu} \nu_\varkappa, \varkappa = 0, \ldots, \mu$, $m \geqq N$, $s = \sigma_0 + it$, $t \in \mathbb{R}$. Da $\{\iota(n_k): k \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\mathbb{T}^\infty$ ist, gibt es zu $m = \max(q_{k(2M)}, N(\varepsilon))$ und zu jedem $\delta > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$(7) \qquad \begin{aligned} &|-n_k(2\pi)^{-1} \log q_{k(j)} - \vartheta^{(0)}_{k(j)}| < \delta \bmod 1, \ j = 1, \ldots, 2M, \\ &|-n_k(2\pi)^{-1} \log q_j| < \delta \bmod 1, \ j \leqq m, \ j \notin A. \end{aligned}$$

Definiert man $g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}^M$ durch

$$\begin{aligned} g(k) = (&\log \zeta_K(\sigma_0+h_0+in_k), (\log \zeta_K)'(\sigma_0+h_0+in_k), \ldots, (\log \zeta_K)^{(\nu_0)}(\sigma_0+h_0+in_k), \\ &\log \zeta_K(\sigma_0+h_1+in_k), \ldots, (\log \zeta_K)^{(\nu_\mu)}(\sigma_0+h_\mu+in_k)), \ k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

so gilt für eine beliebige Komponente von $g(k) - \varphi_{A,\sigma_0}(\Theta^{(0)})$ für hinreichend kleines $\delta > 0$ mit nach (7) gewähltem $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &|(\log \zeta_K)^{(\nu)}(\sigma_0+h_\varkappa+in_k) - (\log \zeta_K(A, \Theta^{(0)}, \sigma_0+h_\varkappa))^{(\nu)}| \\ \leqq\ &\Big|(\log \zeta_K)^{(\nu)}(\sigma_0+h_\varkappa+in_k) - \sum_{l=1}^{m} \sum_{f=1}^{n} -a_l(f)\,(\log(1-q_l^{-f(\sigma_0+h_\varkappa+in_k)}))^{(\nu)}\Big| + \\ +\ &\Big|(\log \zeta_K(A, \Theta^{(0)}, \sigma_0+h_\varkappa))^{(\nu)} - \sum_{l=1}^{m} \sum_{f=1}^{n} -a_l(f)\,(\log(1-q_l^{-f(\sigma_0+h_\varkappa+in_k)}))^{(\nu)}\Big| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist $g(\mathbb{N}) \cap U_1$ dicht in U_1. Setzt man im Hinblick auf die Relation (*) von Satz 2

$$\begin{aligned} G(k) = (&\zeta_K(\sigma_0+h_0+in_k), \zeta'_K(\sigma_0+h_0+in_k), \ldots, \zeta_K^{(\nu_0)}(\sigma_0+h_0+in_k), \zeta_K(\sigma_0+h_1+in_k), \\ &\ldots, \zeta_K^{(\nu_1)}(\sigma_0+h_1+in_k), \ldots, \zeta_K(\sigma_0+h_\mu+in_k), \ldots, \zeta_K^{(\nu_\mu)}(\sigma_0+h_\mu+in_k)), \ k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

so existiert nach dem Beweis von [10], Lemma 2.4 eine Abbildung $\Psi: \mathbb{C}^M \longrightarrow \mathbb{C}^M$ mit nirgends verschwindender Funktionaldeterminante und $\Psi \circ g = G$. Daher ist für eine geeignete offene Menge $U \subset \mathbb{C}^M$, $U \neq \emptyset$, $G(\mathbb{N}) \cap U$ dicht in U. Da die Relation (*) für $s = \sigma_0 + i n_k$ mit $\Phi(G(k)) = 0$ gleichbedeutend ist, und eine holomorphe Funktion $\Phi \neq 0$ auf U nicht identisch verschwindet, ist Satz 2 vollständig bewiesen.

Literatur

[1] B. BAGCHI: A joint universality theorem for Dirichlet L-functions. Indian Stat. Inst. Calcutta, Techn. Report, No. **14**, 1–26 (1981).

[2] H. BOHR und R. COURANT: Neue Anwendungen der Theorie der Diophantischen Approximationen auf die Riemannsche Zetafunktion. J. Reine Angew. Math. **144**, 249–274 (1914).

[3] P.L. DUREN: Theory of H^p-spaces. Academic Press, New York–London, 1970.

[4] D. HILBERT: Mathematische Probleme. Ges. Abhandlungen III, 290–329. Berlin, 1935.

[5] W. LUH: On universal functions. Coll. Math. Soc. János Bolyai **19**, 503–511 (1976).

[6] W. LUH: Über cluster sets analytischer Funktionen. Acta Math. Acad. Sc. Hung. **33**, 137–142 (1979).

[7] A. OSTROWSKI: Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen. Math. Z. **8**, 241–298 (1920).

[8] J. POPKEN: Algebraic independence of certain zêta functions. Indag. Math. **28**, 1–5 (1966).

[9] A. REICH: Werteverteilung von Zetafunktionen. Arch. Math. **34**, 440–451 (1980).

[10] A. REICH: Zetafunktionen und Differenzen-Differentialgleichungen. Arch. Math. **38**, 226–235 (1982).

[11] W. RUDIN: Real and complex analysis. Mc Graw-Hill, New York–Toronto–London, 1966.

[12] S.M. VORONIN: Theorem über die „Universalität" der Riemannschen Zeta-Funktion. Isvestja Akad. Nauk SSSR **39**, Seria Mat., 475–486 (1975) [Russisch].